

Mécanique du Point : P112
Contrôle Continu n° 2

Exercice n°1 :

Soit deux billes A et B de masses respectivement m_1 et m_2 placées sur l'axe Ox . On suspend à un point F fixe, la bille B par un fil, pour avoir un pendule simple. La bille A est projetée avec une vitesse constante \vec{V}_1 vers B , qui est immobile au point O . (fig. n°1)

a) Le choc étant élastique, trouver (en utilisant les équations de conservation de \vec{P} et de E_C)

les vitesses \vec{V}_1 et \vec{V}_2 des billes A et B après le choc.

b) Après le choc la bille B , entamant un mouvement sinusoïdal, se déplace dans le plan Oxy . Soit $M(x_M, y_M)$ le point où l'amplitude angulaire est maximale. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, trouvez la valeur de y_M .

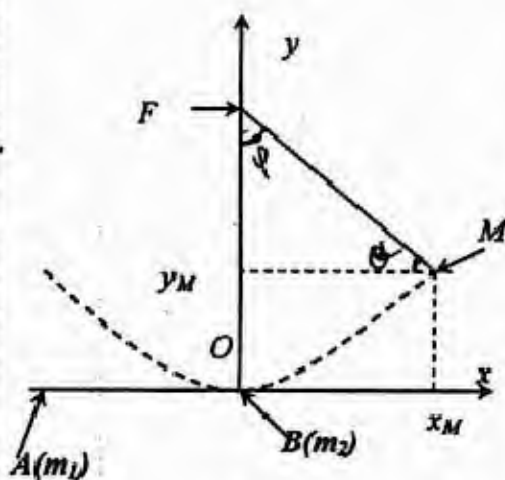


fig. n° 1

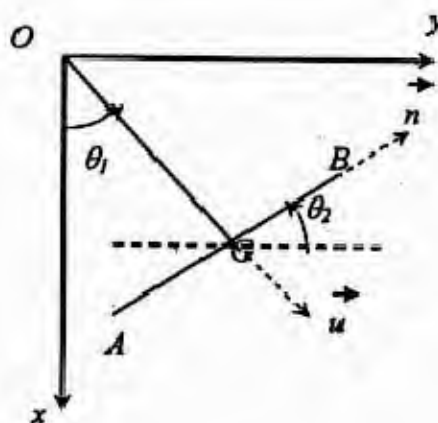


fig. n° 2

Exercice n°2 :

Deux billes identiques, assimilables à deux points matériels de masse m , sont fixées aux deux extrémités d'une barre AB de masse négligeable et de longueur l . Cette barre, astreinte à rester dans le plan Oxy du référentiel $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, est articulée en G à une tige OG de masse négligeable et de longueur a . Le mouvement est repéré par les angles θ_1 et θ_2 . (fig. n°2)

a) Exprimer directement dans le référentiel $R'(G, \vec{u}, \vec{n}, \vec{k})$ le moment cinétique $\vec{\sigma}_O(S/R)$ du système S composé des deux billes en fonction de m , a , l , $\frac{d\theta_1}{dt}$ et $\frac{d\theta_2}{dt}$.

b) Calculer directement l'énergie cinétique $E_C(S/R)$ du système en fonction des mêmes données.

Exercice n°3 :

Dans le référentiel terrestre $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ considéré comme galiléen, une tige tourne dans le plan horizontal (O, \vec{i}, \vec{j}) autour de son extrémité O à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$. Sur cette tige, un anneau M de masse m , peut coulisser sans frottement et est soumis à une force de rappel élastique $\vec{F} = -k(r - r_0)\vec{u}_r$, avec $\vec{OM} = r\vec{u}_r$, l'anneau partant à $t = 0$ de M_0 ($\vec{OM}_0 = r_0 \vec{i}$) sans vitesse initiale par rapport à la tige. (fig. n°3)

En écrivant la relation fondamentale de la dynamique du point matériel dans le référentiel $R'(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ lié à la tige, établir l'équation différentielle du mouvement de l'anneau.

Quelle est la nature du mouvement si on a $\frac{k}{m} - \omega^2 > 0$.

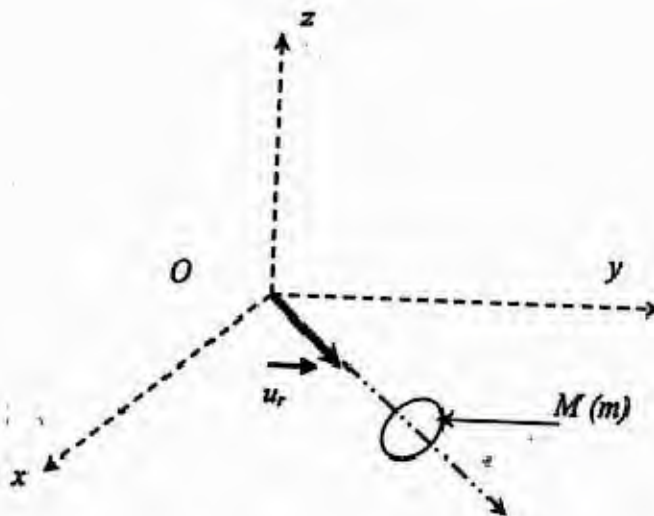


fig. n° 3

Exercice 1

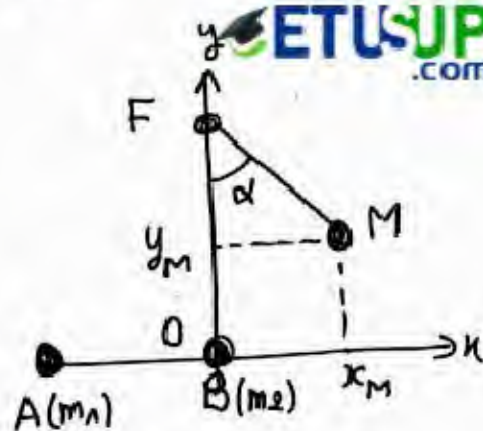
$$a/ \text{C.Q.M} : m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{V}_1' + m_2 \vec{V}_2'$$

$$\text{C.E.C} : \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2'^2$$

$$\begin{cases} m_1 \vec{V}_1 = m_1 \vec{V}_1' + m_2 \vec{V}_2' \\ m_1 V_1^2 = m_1 V_1'^2 + m_2 V_2'^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{V}_1 + \vec{V}_1' = \vec{V}_2' \\ m_1 \vec{V}_1 = m_1 \vec{V}_1' + m_2 \vec{V}_2' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{V}_1 \end{cases}$$



b/ La bille B, au cours de son mouvement, est soumise à 2 forces
la tension du fil \vec{T} et le poids $\vec{P} = m_2 \vec{g}$
 \vec{T} est perpendiculaire à la trajectoire d'où $W(\vec{T}) = 0$

$$W(\vec{P}) = m_2 g y_M$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = W(\vec{T}) + W(\vec{P})$

$$\frac{1}{2} m_2 V_2'^2 - 0 = m_2 g y_M \Rightarrow y_M = \frac{V_2'^2}{2g}$$

$$y_M = \frac{4m_1^2 V_1^2}{2g(m_1 + m_2)^2} = \frac{2m_1^2 V_1^2}{g(m_1 + m_2)^2}$$

Exercice 2

$$a/ \vec{OA} = \vec{OG} + \vec{GA} = a\vec{u} - \frac{\ell}{2}\vec{n} ; \vec{OB} = \vec{OG} + \vec{GB} = a\vec{u} + \frac{\ell}{2}\vec{n}$$

$$\vec{V}(A/R) = a \frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{\ell}{2} \frac{d\vec{n}}{dt} = a \cdot \frac{d\vec{u}}{d\theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} - \frac{\ell}{2} \frac{d\vec{n}}{d\theta_2} \cdot \frac{d\theta_2}{dt} = a\dot{\theta}_1 \vec{n} + \frac{\ell}{2} \dot{\theta}_2 \vec{u}$$

$$\vec{V}(B/R) = a \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{\ell}{2} \frac{d\vec{n}}{dt} = a \cdot \frac{d\vec{u}}{d\theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} + \frac{\ell}{2} \cdot \frac{d\vec{n}}{d\theta_2} \cdot \frac{d\theta_2}{dt} = a\dot{\theta}_1 \vec{n} + \frac{\ell}{2} \dot{\theta}_2 \vec{u}$$

$$\vec{OA} \wedge \vec{V}(A/R) = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{n} & \vec{k} \\ a & -\frac{\ell}{2} & 0 \\ \frac{\ell}{2} \dot{\theta}_2 & a\dot{\theta}_1 & 0 \end{vmatrix} = (a^2 \dot{\theta}_1 + \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta}_2) \vec{k}$$

$$\vec{OB} \wedge \vec{V}(B/R) = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{n} & \vec{k} \\ a & \frac{\ell}{2} & 0 \\ \frac{\ell}{2} \dot{\theta}_2 & a\dot{\theta}_1 & 0 \end{vmatrix} = (a^2 \dot{\theta}_1 + \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta}_2) \vec{k}$$

$$\text{d'où } \Gamma_0(S/R) = \Gamma_0(A/R) + \Gamma_0(B/R) = 2m(a^2 \dot{\theta}_1 + \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta}_2) \vec{k}$$

b/

$$E_c(S/R) = E_c(A/R) + E_c(B/R)$$

$$= \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m \left((a \dot{\theta}_1 \vec{n} + \frac{\ell}{2} \dot{\theta}_2 \vec{u})^2 + (a \dot{\theta}_1 \vec{n} - \frac{\ell}{2} \dot{\theta}_2 \vec{u})^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left(a^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta}_2^2 + a^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta}_2^2 \right)$$

$$= m \left(a^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta}_2^2 \right)$$

Exercice 3

R.F.D dans $R^*(0, \vec{u}_\pi, \vec{u}_\theta, \vec{e})$

$$\vec{F} = m \vec{\gamma}(M/R^*)$$

$$-k(\pi - \pi_0) \vec{u}_\pi = m (\vec{\gamma}(M/R) + \omega^2 \vec{MO})$$

$$-k(\pi - \pi_0) = m (\ddot{\pi} - \omega^2 \pi)$$

$$-\frac{k}{m} \pi + \frac{k}{m} \pi_0 = \ddot{\pi} - \omega^2 \pi$$

$$\boxed{\ddot{\pi} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) \pi = \frac{k}{m} \pi_0}$$

Si $\frac{k}{m} - \omega^2 > 0$ alors posons $K^2 = \frac{k}{m} - \omega^2$ et l'équation

Sans second membre est $\ddot{\pi} + K^2 \pi = 0$

L'équation caractéristique est $\chi^2 + K^2 = 0$ $\chi = \pm iK$

$p=0$, $q=1$; la solution est de la forme

$$\pi = \alpha \cos(Kt) + \beta \sin(Kt) = A \sin(Kt + \varphi)$$

La nature du mouvement est sinusoïdale



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..